ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 29, Nos. 2-3, 1978

LE GROUPE DES TRANSFORMATIONS DE [0, 1] QUI PRESERVENT LA MESURE DE LEBESGUE EST UN GROUPE SIMPLE

PAR

A. FATHI

ABSTRACT

We prove that the group of measure preserving transformations of [0, 1] is a simple group, i.e. has no non-trivial normal subgroup.

§1. Introduction

Soit $\mathscr{G}$ le groupe des bijections de $[0,1]$ qui sont bi-Lebesgue mesurables et qui préservent la mesure de Lebesgue. Comme d'habitude on identifie deux éléments de $\mathscr{G}$ qui sont égaux presque partout.

S. Harada [4] a montré que le groupe $\mathscr{G}$ n'a pas de sous-groupe distingué non trivial fermé pour la topologie faible (voir [3], page 62 pour la définition de la topologie faible).

Le but de cette note est de montrer que $\mathscr{G}$ est en fait un groupe simple. Suivant la méthode habituelle, on montre que $\mathscr{G}$ est parfait et que $[\mathscr{G},\mathscr{G}]$ est le plus petit sous-groupe distingué de $\mathscr{G}$.

Dans la suite, m désigne la mesure de Lebesgue. Si $f \in \mathscr{G}$, $\sup f = \{x \mid x \in [0,1], f(x) \neq x\}$.

On utilisera fréquemment et sans le mentionner explicitement le lemme suivant:

LEMME 0. *Si A et B sont deux sous-ensembles mesurables de* $[0,1]$ *ayant même mesure, alors il existe f appartenant à $\mathscr{G}$ tel que $f(A) = B$.*

Pour une démonstration du Lemme 0, nous renvoyons à [3] page 74.

Je remercie vivement Michel Herman pour m'avoir indiqué ce problème, ainsi que pour m'avoir encouragé à le résoudre.

Received December 3, 1976

§2. Etude des transformations à orbites finies

Soit $f \in \mathscr{G}$; on dit que f est à orbites finies si, pour tout $x \in [0,1]$ $\{f^n(x) \mid n \in \mathbf{Z}\}$ est un ensemble fini.

PROPOSITION 1. *Soit $f \in \mathscr{G}$ une transformation à orbites finies, alors f est un commutateur. Plus précisément, il existe s et $t \in \mathscr{G}$ tels que $f = [s,t] = sts^{-1}t^{-1}$; de plus on peut supposer que* $\sup s$ *et* $\sup t$ *sont inclus dans* $\sup f$.

DÉMONSTRATION. 1er cas: On suppose que toutes les orbites de f sont de longueur p. Une telle transformation est conjuguée à la rotation d'angle $2\pi/p$ sur un cercle (voir le lemme 1 page 70 et le milieu de la page 78 dans [3]). Une telle rotation R est le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des droites. Comme deux telles symétries sont conjuguées par une rotation, on obtient aisément que cette rotation est un commutateur dans $\mathscr{G}$.

2e cas: Soit f à orbites finies. On désigne par Y_p la réunion des orbites de f de longueur p. On a alors $[0,1] = \bigcup_{p \geqq 0} Y_p$ et $\sup f = \bigcup_{p \geqq 1} Y_p$. Il suffit d'appliquer le cas précédent à $f \mid Y_p$ pour $p \geqq 1$ pour conclure. □

§3. G est parfait

On utilisera la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Soit $f \in \mathscr{G}$. On peut trouver une décomposition de* $[0,1]$ *en* 6 *ensembles mesurables* $[0,1] = A \cup B_1 \cup B_2 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$, *telle que*:

i) *$f \mid A$ est l'identité,*

ii) $f(B_1) = B_2$,

iii) $f(C_1) = C_2$, $f(C_2) = C_3$.

Pour une démonstration de la Proposition 2, nous renvoyons au lemme 7.2, page 104 de [2].

La Proposition 2 est représentée schématiquement par la Figure 1:

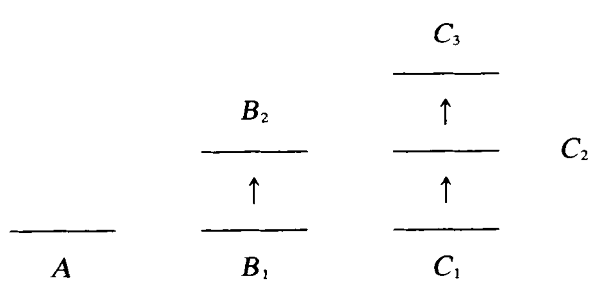

Fig. 1.

Gardons les notations de la Proposition 2. On note par $\bar{f}$ la transformation induite par f sur $B_1 \cup C_1$, plus précisément dans notre cas, f est défini par:

$$\bar{f} = \begin{cases} f^2 \text{ sur } \mathrm{B}_1 \\ f^3 \text{ sur } C_1. \\ \text{id ailleurs} \end{cases}$$

On vérifie aisément les points suivants:

— $\bar{f} \in \mathcal{G}$,

— $\sup \bar{f} \subset \sup f$,

— $m(\sup \bar{f}) \leqq \frac{1}{2} m(\sup f)$.

Remarquons alors que $\bar{f}^{-1} f$ est à orbites finies, car on a (comme un calcul immédiat le montre):

$$\bar{f}^{-1} f = \begin{cases} \text{id sur } A \\ f \text{ sur } B_1 \\ f^{-1} \text{ sur } B_2 \\ f \text{ sur } C_1 \cup C_2 \\ f^{-2} \text{ sur } C_3. \end{cases}$$

Regroupant ce qui vient d'être montré et la Proposition 1, on obtient:

LEMME 3. *Pour tout f appartenant à $\mathcal{G}$, on peut trouver $\bar{f}$, s, t appartenant à $\mathcal{G}$ tels que:*

i) $f = [s, t]\bar{f}$,

ii) $\sup s, \sup t$, $\sup \bar{f}$ *sont inclus dans* $\sup f$,

iii) $m(\sup \bar{f}) \leqq \frac{1}{2} m(\sup f)$.

Dans le lemme suivant I_i désigne l'intervalle $I_i = [\Sigma_{j=1}^{i-1} 1/2^j, \Sigma_{j=1}^{i} 1/2^j]$, voir Figure 2.

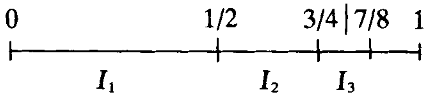

Fig. 2.

LEMME 4. *Soit f appartenant à $\mathcal{G}$, supposons que* $\sup f \subset I_1$. *On peut alors construire 2 suites $(f_i)_{i \geqq 1}$ $(C_i)_{i \geqq 1}$ d'éléments de $\mathcal{G}$ telles que:*

a) $f_1 = f$,

b) $f_i = C_i f_{i+1}$,

c) $\sup f_i \subset I_i$,

d) $C_i = [s_i, t_i][s'_i, t'_i]$ *avec* $\sup s_i$, $\sup t_i$, $\sup s'_i$ *et* $\sup t'_i$ *inclus dans* $I_i \cup I_{i+1}$.

DÉMONSTRATION. On montre comment construire C_1 et f_2, les suites s'obtiennent en recommençant de la même manière.

Par le Lemme 3, on peut trouver $\bar{f}$, s, t tous de support dans I_1 tels que:

— $f = [s,t]\bar{f}$,

— $m(\sup \bar{f}) \leqq \frac{1}{2} m(\sup f)$.

Par la 2e condition, on a $m(\sup \bar{f}) \leqq m(I_2) = \frac{1}{2} m(I_1)$.

Par application du Lemme 0, on peut trouver $t' \in \mathcal{G}$ tel que $\sup t' \subset I_1 \cup I_2$ et que $t'(\sup \bar{f}) \subset I_2$. Posons alors $f_2 = t'\bar{f}t'^{-1}$, on a:

— $\sup f_2 \subset I_2$,

— $f = [s,t]\bar{f} = [s,t][\bar{f},t']t'\bar{f}t'^{-1} = [s,t][\bar{f},t']f_2$.

Il suffit alors de poser $C_1 = [s,t][\bar{f},t']$. □

COROLLAIRE 5. *Soit f tel $m(\operatorname{Sup} f) \leqq \frac{1}{2}$, alors f est le produit de 4 commutateurs.*

DÉMONSTRATION. Par le Lemme 0, on peut supposer que $\sup f \subset I_1$. Appliquons à f la construction du Lemme 4, dont nous gardons les notations.

Puisque les $(C_{2k+1})_{k \geq 1}$ (resp$(C_{2k})_{k \geq 1}$) ont des supports disjoints, il est facile de voir que $C_{\text{imp}} = C_1 C_3 C_5 \ldots$ (resp $C_{\text{pair}} = C_2 C_4 C_6 \ldots$) existe. De plus $C_{\text{imp}} = [s_{\text{imp}}, t_{\text{imp}}]\,[s'_{\text{imp}}, t'_{\text{imp}}]$ (resp $C_{\text{pair}} = [s_{\text{pair}}, t_{\text{pair}}]\,[s'_{\text{pair}}, t'_{\text{pair}}]$). Si on montre alors que $f = C_{\text{imp}} C_{\text{pair}}$, on aura terminé.

Pour le faire, remarquons que la relation $C_i = f_i f_{i+1}^{-1}$ et le fait que les f_i ont des supports disjoints, entraînent que:

$$C_{\text{imp}} = f_1 f_2^{-1} f_3 f_4^{-1} f_5 f_6^{-1} \ldots = (f_1 f_3 f_5 \ldots)(f_2^{-1} f_4^{-1} f_6^{-1} \ldots),$$

$$C_{\text{pair}} = f_2 f_3^{-1} f_4 f_5^{-1} f_6 f_7^{-1} \ldots = (f_3^{-1} f_5^{-1} f_7^{-1} \ldots)(f_2 f_4 f_6 \ldots).$$

En faisant le produit de ces égalités membre à membre, on obtient:

$$f = f_1 = C_{\text{imp}} C_{\text{pair}}.$$ □

THÉORÈME 6. *$\mathcal{G}$ est parfait. Plus précisément tout élément de $\mathcal{G}$ est le produit de 5 commutateurs.*

DÉMONSTRATION. Par le Lemme 3, $f = [s,t]\bar{f}$ avec $m(\sup \bar{f}) \leqq \frac{1}{2}$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 5 à $\bar{f}$. □

§4. $\mathcal{G}$ est simple

On va démontrer que $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est le plus petit sous-groupe distingué de $\mathcal{G}$. Pour cela on va adapter à notre situation un argument connu, qui est dû à Epstein [1] et Higman [5].

On démontre d'abord un lemme.

LEMME 7. *Soit $\varepsilon > 0$ donné, toute transformation appartenant à $\mathcal{G}$ s'écrit $f = g_1 \cdots g_n$ avec $m(\sup g_i) < \varepsilon$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que si $f \in \mathcal{G}$, alors $f = g_1 g_2$ avec $m(\sup g_i) \leqq \frac{3}{4} m(\sup f)$ $i = 1, 2$.

Posons $A = \sup f$. Soit $B \subset A$ avec $m(B) = \frac{1}{4} m(A)$. Soit $g_1 \in \mathcal{G}$ qui vérifie:

— $g_1 | B = f$,

— $\sup g_1 \subset B \cup f(B)$ et par conséquent $m(\sup g_1) \leqq \frac{1}{2} m(A)$.

L'existence de g_1 est établie par le Lemme 0 puisque $m(B - f(B)) = m(f(B) - B)$. Cette égalité résulte du calcul suivant:

$$\begin{aligned} m(B - f(B)) &= m(B - B \cap f(B)) = m(B) - m(B \cap f(B)) \\ &= m(f(B)) - m(B \cap f(B)) = m(f(B) - B). \end{aligned}$$

Si on pose $g_2 = g_1^{-1} f$, on a $\sup g_2 \subset A - B$ et par conśequent $m(\sup g_2) \leqq m(A - B) = \frac{3}{4} m(A)$. □

REMARQUE. Le Lemme 7 se démontre aussi immédiatement en remarquant que $\mathcal{G}$ est connexe (et même contractile) pour la topologie forte [6].

PROPOSITION 8. *$[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est le plus petit sous-groupe distingué (non trivial) de $\mathcal{G}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe distingué non trivial de $\mathcal{G}$. On peut alors trouver $f \in \mathcal{H}$ $f \neq \mathrm{id}$. Puisque $f \neq \mathrm{id}$, il existe $E \subset [0, 1]$ de mesure > 0 et tel que $f(E) \cap E = \varnothing$ (voir Lemme 7.1, page 103 de [2]).

Pour montrer que $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{H}$, il suffit, d'après le Lemme 7, de montrer que si g, $h \in \mathcal{G}$ ont un support de mesure inférieure à $m(E)/2$, alors $[g, h] \in \mathcal{H}$.

Par l'hypothèse faite sur g et h, on a $m(\sup h \cup \sup g) \leqq m(E)$, par conséquent, quitte à conjuguer f par un élément de $\mathcal{G}$, on peut supposer que $\mathrm{Sup}\, g \cup \mathrm{Sup}\, h \subset E$.

Remarquons alors que $\hat{h} = [h, f] = h f h^{-1} f^{-1}$ appartient à $\mathcal{H}$. De même $[g, \hat{h}]$ appartient à $\mathcal{H}$. Or $[g, \hat{h}] = [g, h]$, comme on le voit en remarquant que g et $f h^{-1} f^{-1}$ commutent, puisqu'ils sont à supports disjoints ($\sup g \subset E$ et $\sup f h^{-1} f^{-1} \subset f(E)$). On a alors $[g, h] \in \mathcal{H}$. □

Regroupant le Théorème 6 et la Proposition 9, on obtient:

THÉORÈME. *$\mathcal{G}$ est un groupe simple.*

§5. Conséquence

Puisque $\mathcal{G}$ est un groupe simple, si f est $\neq \mathrm{id}$, tout autre élément g s'écrit $g = f_1 \cdots f_n$, avec f_i conjugué à $f^{\pm 1}$. Nous allons voir que n peut être majoré par une constante qui ne dépend que de $m(\sup f)$. La démonstration se fait en examinant de plus près ce qui précède.

Considérons d'abord le cas des involutions. Rappelons que T est une involution si $T^2 = \mathrm{Id}$.

LEMME 9. *Tout élément de $\mathscr{G}$ est le produit d'au plus* 10 *involutions.*

DÉMONSTRATION. Il ressort de la démonstration de la Proposition 1 que toute transformation à orbites finies est le produit de deux involutions.

Considérons maintenant f avec $\sup f \subset I_1$. Par ce qui précède le Lemme 3, on peut écrire $f = g_1\bar{f}$ avec $m(\sup \bar{f}) \leqq \frac{1}{4}$ et g_1 à orbites finies. Si t une involution telle que $t(\sup \bar{f}) \subset I_2$, $\sup t \subset I_1 \cup I_2$ et $m(\sup t) = 2m(I_2)$, on a: $f = g_1\bar{f}t\bar{f}^{-1}t^{-1}t\bar{f}t^{-1}$. Si on pose $\bar{f}t\bar{f}^{-1} = h_1$, $t^{-1} = k_1$ et $t\bar{f}t^{-1} = f_2$, on a:

— $f = g_1h_1k_1f_2$,

— g_1 est à orbites finies, h_1 et k_1 sont des involutions,

— $\sup g_1 \subset I_1$; $\sup h_1$ et $\sup k_1 \subset I_1 \cup I_2$; $\sup f_2 \subset I_2$.

Ce procédé permet de construire par induction des suites $(f_i)_{i\geqq 1}$ $(g_i)_{i\geqq 1}$ $(h_i)_{i\geqq 1}$ et $(k_i)_{i\geqq 1}$ telles que:

— $f = f_1$, $\sup f_i \subset I_i$,

— $f_i = g_ih_ik_if_{i+1}$,

— g_i est à orbites finies, h_i et k_i sont des involutions,

— $\sup g_i \subset I_i$, $\sup h_i$ et $\sup k_i \subset I_i \cup I_{i+1}$; $m(\sup h_i) = m(\sup k_i) = 2m(I_{i+1})$.

On obtient comme au Corollaire 5: $f = g_{\text{imp}}h_{\text{imp}}k_{\text{imp}}g_{\text{pair}}h_{\text{pair}}k_{\text{pair}}$, clairement h_{imp}, k_{imp}, h_{pair} et k_{pair} sont des involutions, g_{imp} et g_{pair} sont d'ordre fini, et par conséquent chacun est le produit de 2 involutions. On en conclut que f est le produit de 8 involutions.

Ce qui précède le Lemme 3 montre qu'une transformation quelconque est le produit d'une transformation à orbites finies et d'une transformation dont le support a une mesure $\leqq \frac{1}{2}$, par conséquent toute transformation est le produit d'au plus 10 involutions. □

REMARQUE. Dans la construction précédente, on voit que $m(\sup g_i) \leqq m(I_i) = 1/2^i$ et $m(\sup h_i) = m(\sup k_i) = 2m(I_{i+1}) = 1/2^i$. Ceci nous donne:

$$m(\sup g_{\text{imp}}),\ m(\sup h_{\text{imp}}),\ m(\sup k_{\text{imp}}) \leqq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i+1}} = \frac{2}{3},$$

$$m(\sup g_{\text{pair}}),\ m(\sup h_{\text{pair}}),\ m(\sup k_{\text{pair}}) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} = \frac{1}{3}.$$

Ceci permet de dire que, parmi les dix involutions nécessaires pour écrire une transformation, il y en a 4 dont le support a une mesure $\leqq \frac{1}{3}$ et 4 dont le support a une mesure $\leqq \frac{2}{3}$. On utilisera ce fait dans la suite.

LEMME 10. *Si $f \in \mathscr{G}$, alors il existe $E \subset I$ tel que $m(E) \geqq \frac{1}{3}m(\sup f)$ et $f(E) \cap E = \varnothing$.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence de la Proposition 2, car il suffit de poser $E = B_1 \cup C_1$. □

COROLLAIRE 11. *Soit* $f \in \mathcal{G}$, $f \neq \mathrm{id}$. *Soit t une involution, alors t est le produit de* $2k$ *conjugués de f ou* f^{-1} *avec* $k = [3m(\sup t)/2m(\sup f)] + 1$, *où* $[x]$ *est le plus grand entier strictement inférieur à x.*

DÉMONSTRATION. Si t est une involution quelconque, t s'écrit comme le produit de k involutions dont le support a une mesure $\leqq \frac{2}{3}m(\sup f)$, où $k = [3m(\sup t)/2m(\sup f)] + 1$. Il suffit, par conséquent, de montrer que, si $\alpha \leqq \frac{2}{3}m(\sup f)$, alors il existe une involution t avec $m(\sup t) = \alpha$ et t est le produit de 2 conjugués de $f^{\pm 1}$. Pour cela, soit t' une involution avec $\sup t' \subset E$ et $m(\sup t') = \alpha/2$, où E est donné par le Lemme 10; si on pose $t = t'ft'f^{-1}$, on vérifie aisément que t a les propriétes voulues. □

THÉORÈME. *Si* $f \neq \mathrm{id}$, *tout élément de* $\mathcal{G}$ *est le produit d'au plus* $(18n + 24)$ *conjugués de f ou* f^{-1}, *où* $n = [1/m(\sup f)]$. *En particulier si l'ensemble des points fixes de f est négligeable, tout élément de $\mathcal{G}$ est le produit d'au plus* 24 *conjugués de f ou* f^{-1}.

DÉMONSTRATION. Le Corollaire 11, joint au Lemme 9 et à la remarque qui le suit, montrent qu'un élément de $\mathcal{G}$ est le produit d'au plus $2l$ conjugués de f ou f^{-1} avec:

$$l = 2\left(\left[\frac{3 \cdot 1}{2m(\sup f)}\right] + 1\right) + 4\left(\left[\frac{3 \cdot \frac{2}{3}}{2m(\sup f)}\right] + 1\right) + 4\left(\left[\frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{2m(\sup f)}\right] + 1\right).$$

Or on voit facilement que:

$$l \leqq 2\left(\left(\tfrac{3}{2}n + 1\right) + 1\right) + 4(n + 1) + 4\left(\tfrac{n}{2} + 1\right) = 9n + 12. \qquad \square$$

REFERENCES

1. D. B. Epstein, *Diff(M) is simple?*, Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems, Warwick, 1968–69, Lecture Notes **206**, Springer-Verlag, pp. 52–54.

2. N. A. Friedman, *Introduction to Ergodic Theory*, Van Nostrand, Reinhold, 1970.

3. P. R. Halmos, *Ergodic Theory*, Chelsea, 1956.

4. S. Harada, *Remarks on the topological group of measure preserving transformations*, Proc. Japan Acad. **27** (1951), 523–526.

5. G. Higman, *On infinite simple permutation groups*, Publ. Math. Debrecen **3** (1953–54), 221–226.

6. M. Keane, *Contractibility of the automorphism group of a non-atomic measure space*, Proc. Amer. Math. Soc. **26** (1970), 420–422.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY
BÂTIMENT 425, 91405 ORSAY, FRANCE